

Acerca de la comprensión del concepto del supremo

Lidia Aurora Hernández Rebollar y María Trigueros Gaisman

Resumen. Esta investigación tiene como objetivo estudiar la construcción del concepto del supremo en el nivel de educación superior. El marco teórico que se utiliza es la teoría APOE (Dubinsky, 1991) sobre la construcción de objetos matemáticos. Se presenta una descomposición genética del concepto en la que se modelan las construcciones mentales que los estudiantes pueden llevar a cabo para la comprensión del concepto. Para validar estas posibles construcciones se diseñó un cuestionario y se aplicó a estudiantes de las licenciaturas de matemáticas y de física de una universidad pública. Algunas de las respuestas que presentamos permiten observar que el proceso de construcción del concepto por el que pasan los estudiantes es muy complejo y que la mayoría no construye una concepción de tipo acción del mismo. El análisis de las respuestas de los estudiantes ha sido útil también para conocer las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando intentan demostrar que cierto número es el supremo de un conjunto dado.

Palabras clave: Teoría APOE, comprensión, supremo.

About the understanding of the supremum concept

Abstract. The main goal of this work is to study how university students construct the supremum concept. The theoretical framework, used in this study, is APOS theory (Dubinsky, 1991); that describes mathematical objects construction. We present a genetic decomposition of the supremum concept that describes the mental constructions that the authors consider students should perform to understand such concept. To validate these possible constructions we designed and applied a questionnaire for mathematics and physics students of a public university. Some answers show that the student's construction process is a hard task, and most students do not construct an action conception of this concept. The analysis of the student answers has been also useful to know the difficulties that students face when they try to demonstrate that a number is a supremum of a given set.

Key words: APOS Theory, understanding, supremum.

Fecha de Recepción: 16 de febrero de 2012. **Fecha de Aceptación:** 27 de noviembre de 2012

INTRODUCCIÓN

El concepto del supremo, como la mínima de las cotas superiores de un conjunto de números reales, permite establecer el axioma del mismo nombre en un curso introductorio de Análisis Matemático a nivel superior, y tanto el concepto como el axioma son elementos indispensables en el desarrollo de esta materia, de acuerdo con las presentaciones que hacen algunos autores de libros de cálculo como Hassler (1988), Apostol (1982) y Spivak (1992). Los libros tradicionales de esta rama de la matemática varían en poco la presentación de este concepto, después de una definición formal se demuestran rigurosamente los teoremas correspondientes. Nosotros situamos nuestro estudio en una universidad pública donde el concepto se presenta en el primer curso de matemáticas a estudiantes de las carreras de física y matemáticas. Este curso se denomina Matemáticas Básicas y la mayoría de los profesores que lo imparten siguen la presentación de Angoa, Contreras, Ibarra, Linares y Martínez (2004) o alguno de los mencionados arriba. Una descripción de la forma en que estos libros presentan el concepto aparece en la tesis de Acevedo (2011). El número de reprobados en este curso (alrededor de 60% entre 2008 y 2010) ha llamado nuestra atención, y el reporte de una encuesta aplicada a varios grupos de estudiantes que cursan esta materia muestra que, en particular, el concepto del supremo presenta gran dificultad (Maldonado, 2012). Al impartir este curso durante más de cinco años hemos observado que los problemas propuestos al final del tema en el libro de texto son particularmente difíciles de resolver para los estudiantes. Cabe mencionar que dicho libro no está basado en investigación en Matemática Educativa y que su presentación también sigue el modelo formal.

La teoría APOE de Dubinsky y colaboradores ha sido útil en el análisis de la construcción de conceptos de matemáticas de nivel superior, diversos autores la han utilizado para estudiar la comprensión de conceptos tales como función de dos variables, derivada, integral, base, etc. (Tall, Thomas, Davis, Gray y Simpson 2000; Sánchez-Matamoros, García y Linares 2006; Trigueros, 2005; Salgado y Trigueros 2009; Martin, Loch, Cooley, Dexter y Vidakovic 2010, Aldana, 2011, Roa-Fuentes, 2012, Martinez-Planell y Trigueros, 2012); por esta razón la consideramos apropiada como marco teórico de este trabajo. Una ventaja de esta teoría es que la información generada a partir de una descomposición genética, validada mediante investigación con estudiantes, se puede utilizar para diseñar material didáctico, con el fin de alcanzar un mejor aprendizaje del concepto. Una secuencia didáctica basada en este trabajo ya ha sido diseñada y reportada en la tesis de Acevedo (2011).

Utilizando esta teoría, las preguntas que nos hemos planteado resolver son:

1. ¿Qué construcciones mentales son necesarias para la construcción del concepto del supremo?
2. ¿Qué construcciones mentales han alcanzado los estudiantes cuando estudian el concepto del supremo en un curso tradicional?
3. ¿A qué dificultades se enfrentan los estudiantes cuando requieren aplicar el concepto del supremo?

Hasta este momento no tenemos conocimiento de estudios que reporten las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto del supremo, ni tampoco acerca de propuestas para su enseñanza y aprendizaje; sin embargo, ha sido el alto número de reprobados y las dificultades observadas en el curso impartido por la primera autora, lo que ha motivado esta investigación.

Después de esta introducción, presentamos una breve descripción de la teoría APOE por ser la que sustenta este trabajo de investigación. Continuamos con la descripción de la metodología que se siguió para conocer las concepciones por las que transitan los estudiantes al construir el concepto en estudio. Dentro de la metodología utilizada se incluye el diseño de una descomposición genética del concepto, la que se utilizó para elaborar el instrumento de investigación y para analizar las concepciones de los estudiantes. La sección de resultados presenta dichas concepciones, las cuales se deducen del análisis de las respuestas de los estudiantes. Finalmente, en las conclusiones, se resume el proceso que siguen los estudiantes para construir el concepto del supremo y que se ha observado al final de esta investigación.

MARCO TEÓRICO

Si deseamos investigar cómo los individuos construyen conceptos matemáticos, encontramos que diversos autores nos remiten a la idea de construcción de objetos mentales, que se pueden manipular en un proceso que generalmente es realizado paso a paso. En realidad, esta idea tiene sus orígenes en la epistemología de Piaget, quien explica tal proceso de construcción mediante la abstracción reflexiva. Dubinsky y el grupo de investigadores integrados en *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC) han adaptado la teoría piagetiana relativa a la abstracción reflexiva al pensamiento matemático

avanzado (Asiala *et al.*, 1996). Para Dubinsky (1991, 1991a, 1996), la abstracción reflexiva es el mecanismo por el cual se construyen objetos mentales a través de acciones físicas o mentales sobre estos objetos matemáticos. La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), desarrollada por RUMEC, propone un modelo para explicar la manera en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos de nivel superior. Dicha construcción se puede describir mediante tres construcciones básicas: acción, proceso y objeto. En la teoría APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas para su aprendizaje. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto. Cuando se utiliza la teoría APOE en la investigación o en el diseño de material didáctico, se empieza por hacer una descomposición genética del o de los conceptos de interés. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos, la forma de ir estructurándolos para posibilitar la construcción de la concepción objeto y las relaciones con otros objetos o esquemas necesarios para la construcción de esquemas. Con esta descomposición genética se diseña material didáctico o un instrumento para conocer las concepciones que los estudiantes han desarrollado acerca del concepto. Si se elige la primera opción, se puede pasar al diseño y a la aplicación de un instrumento de investigación. Después, el análisis de las respuestas del instrumento se puede usar para refinar la descomposición genética inicial y para volver a la primera opción (Trigueros, 2005).

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo esta investigación se diseñó, en primer lugar, una descomposición genética del concepto del supremo. Con base en esta descomposición genética, se diseñó un cuestionario con preguntas o problemas relativos a este concepto. El cuestionario se aplicó a dos grupos distintos de estudiantes y se analizaron sus respuestas. Posteriormente, se entrevistó a siete de los estudiantes que habían contestado el cuestionario y la entrevistadora registró las preguntas y las respuestas mediante escritura manual. Las respuestas de ambos cuestionarios se analizaron en conjunto para extraer la información relativa a las acciones, procesos y objetos; es decir, a las construcciones predichas por la descomposición genética de los conceptos involucrados y que se pueden inferir del trabajo de los estudiantes a partir del análisis de las respuestas. Los resultados que se presentan en este artículo son precisamente los que se derivan de este análisis.

PARTICIPANTES

Participaron en esta investigación 34 estudiantes: 24 que se encontraban repitiendo el curso de matemáticas básicas, donde se estudia el supremo y al que llamaremos grupo A, y diez que cursaban la materia Cálculo Diferencial, consecuente del curso Matemáticas Básicas y al que denominaremos grupo B. Los estudiantes del grupo A habían estudiado el tema del supremo un mes antes de que respondieran nuestro cuestionario. Los del grupo B aprobaron la materia matemáticas básicas el semestre anterior y en la materia de Cálculo Diferencial conocieron algunas aplicaciones del concepto que nos ocupa. En ambos grupos había estudiantes de las licenciaturas de física y de matemáticas, quienes respondieron el cuestionario en la parte final de sus cursos (junio de 2010). Estos estudiantes no tenían ninguna otra característica especial y participaron en la investigación de manera voluntaria.

INSTRUMENTO

El instrumento es un cuestionario que se diseñó expresamente para detectar el proceso de construcción del concepto del supremo, basándonos en la teoría APOE, pero sin incluir la concepción de esquema. Además, se realizaron siete entrevistas a estudiantes que habían contestado el cuestionario y que tuvieron la disposición para responderlas, con el fin de recabar mayor información sobre sus contestaciones al cuestionario. Las entrevistas fueron transcritas manualmente al momento de realizarse y se utilizaron únicamente para reforzar la interpretación y el análisis de las respuestas del cuestionario. El diseño del instrumento siguió dos etapas:

Etapas 1. Análisis del concepto del supremo a través de una descomposición genética.

Etapas 2. Diseño y selección de los problemas con base en la descomposición genética.

Etapas 1. Una descomposición genética de un concepto matemático es un modelo que se construye a partir del análisis de las construcciones cognitivas que se requieren para el aprendizaje de dicho concepto. En ella se incluyen las acciones, los procesos y la forma en que estos se coordinan e interiorizan, de tal forma que se posibilite el encapsulamiento del concepto, a lo cual se denomina

concepción objeto del concepto. La descomposición genética también puede incluir la descripción de la construcción de relaciones entre dichas acciones, procesos y objetos involucradas en la construcción de esquemas. En la descomposición genética del supremo que nosotros proponemos aquí, hemos incluido únicamente un análisis hasta la concepción objeto del supremo.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DEL SUPREMO

Para comprender el concepto del supremo, los alumnos deben haber construido un esquema de conjuntos, lo cual significa: el manejo de notación formal, operaciones básicas con conjuntos, identificación de complementos de conjuntos, representaciones analíticas y gráficas (en recta numérica o con diagramas de Venn). También deben haber construido un esquema de lógica que implica: traducción de proposiciones no cuantificadas, las cuales incluyan conectivos y, o, no e implicación y su negación, del lenguaje natural al simbólico y viceversa; el uso de cuantificadores y su negación en proposiciones compuestas (que incluyen varios cuantificadores, conectivos y negaciones) como proceso. Además, la posibilidad de construir argumentos simples y demostraciones directas e indirectas como un proceso. Deben también haber construido el concepto de cota superior.

CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE COTA SUPERIOR

Dado un conjunto numérico discreto A , el estudiante hace la acción de identificar un conjunto de números B que sean mayores o iguales que todos los elementos del conjunto A , así como el mayor de los elementos del conjunto A y las acciones de comparación necesarias para mostrar que, efectivamente, los elementos de B son mayores o iguales que los elementos de A .

Estas acciones se interiorizan en el proceso de generalización, que consiste en identificar el conjunto B de todos los números mayores o iguales que todos los elementos de un conjunto A , cuando este pasa de ser discreto a un conjunto continuo, y en el proceso de generalización que consiste en identificar el conjunto de todos los números mayores o iguales que todos los elementos de un conjunto A de cualquier tipo, si existe. El proceso anterior se coordina con el proceso de demostración de que, efectivamente, ese conjunto B contiene únicamente elementos que son mayores o iguales que todos los elementos del conjunto dado A . Los procesos anteriores también se pueden revertir en el

proceso de encontrar un conjunto para el cual, otro conjunto dado, constituye un conjunto de cotas superiores.

CONSTRUCCIÓN DE MÍNIMA COTA SUPERIOR

Dado un conjunto de cotas superiores B de otro conjunto no vacío dado A , el estudiante debe hacer la acción de identificar el elemento mínimo del conjunto B y las acciones necesarias para justificar que efectivamente lo es. Estas acciones se interiorizan en el proceso de generalización que permite encontrar la mínima cota superior de un conjunto A , arbitrario, acotado superiormente y no vacío. Este proceso se coordina con el proceso necesario para demostrar que, efectivamente, ese número es la menor de las cotas superiores (la mínima cota superior). Los procesos anteriores se pueden revertir en el proceso de encontrar un conjunto para el cual un número dado constituye una mínima cota superior.

Los procesos de encontrar el conjunto de cotas superiores y de encontrar la mínima cota superior se generalizan y se coordinan para encontrar el conjunto de cotas superiores para un conjunto abstracto dado, y en el proceso de encontrar la mínima cota superior de ese conjunto. Estos procesos involucran el uso de notación simbólica de conjuntos y de lógica, por lo que se deben coordinar con los elementos de los esquemas correspondientes. Los procesos anteriores de demostración se deben generalizar para incluir las demostraciones para este tipo de conjuntos.

El estudiante efectúa las acciones y los procesos necesarios para determinar el conjunto de cotas superiores y el supremo de conjuntos definidos mediante operaciones con otros conjuntos. Esto hace necesaria la coordinación con el esquema de conjuntos, incluyendo el uso de distintas representaciones de los mismos, y el proceso de demostrar que el supremo determinado efectivamente lo es.

ENCAPSULACIÓN DEL OBJETO SUPREMO

Ante la necesidad de demostrar proposiciones que involucran supremos de conjuntos generales obtenidos mediante operaciones con conjuntos, el estudiante encapsula los procesos descritos anteriormente en el objeto supremo de cada uno de los conjuntos para poder hacer las acciones necesarias sobre ellos.

Etapa 2. De acuerdo con la descomposición genética anterior es posible observar la presencia de las concepciones involucradas en la construcción del

concepto del supremo en los estudiantes, a través de las respuestas al cuestionario diseñado. Para detectar las concepciones mencionadas, tendremos en cuenta lo siguiente.

Nosotros consideraremos que un estudiante muestra una concepción acción del concepto del supremo, cuando este es capaz de identificar el supremo de conjuntos dados numéricamente, con un número finito de elementos y, además, que puede comprobar que, efectivamente, ese elemento satisface la definición; de identificar el supremo en intervalos acotados utilizando reglas memorizadas, o de identificar que no existe el supremo cuando los conjuntos no están acotados, también utilizando reglas memorizadas.

Un estudiante muestra una concepción proceso de supremo cuando, para distintos tipos de conjuntos y, en particular, para conjuntos definidos de manera general o abstracta, es capaz de encontrar el supremo y de argumentar, incluyendo cuantificadores en su justificación, al menos en algunos casos.

Un estudiante muestra una concepción objeto del concepto del supremo cuando es capaz de encontrar el supremo de conjuntos arbitrarios, incluidos los que se obtienen a través de operaciones entre conjuntos, y demostrar formalmente que efectivamente lo es.

Los problemas del cuestionario fueron diseñados o elegidos tomando en cuenta la descomposición genética anterior. Se consideró que la demanda del problema propuesto al estudiante fuera tal, que pudiéramos inferir las construcciones y las concepciones del objeto del supremo. Por ello tuvimos en cuenta la lista de ejercicios y los ejemplos propuestos en el libro de texto.

En la Figura 1 se muestra el cuestionario diseñado. Notemos que en el cuestionario se presenta la definición formal del supremo; sin embargo, debemos aclarar que, antes de que los estudiantes contestaran este cuestionario, se les pidió escribir la definición del supremo tal y como la recordaran.

La pregunta uno, en cada uno de sus incisos, corresponde a la acción de comparar los elementos de cada conjunto para determinar si existe alguno de ellos mayor o igual que todos los elementos del conjunto. Aunque en algunos casos se requiere de una generalización, este tipo de ejemplos se trabajan en clase y, por lo tanto, pueden ser resueltos por memorización, como es el caso de identificar el supremo de intervalos abiertos o cerrados.

Cuestionario No 1

Este cuestionario tiene como objetivo identificar el proceso de construcción del concepto del supremo de un conjunto real.

Nombre: _____

Matrícula: _____

Definición del supremo. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de A , si cumple las dos proposiciones siguientes:

i) $\forall x \in A, \alpha \geq x$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $\forall x \in A, c \geq x$ entonces $c \geq \alpha$

1. ¿Cuál es el supremo de los conjuntos siguientes?
 - a. $[-1, 5]$
 - b. $(-8, -1/2)$
 - c. $(3, \infty)$
 - d. $\{-2, 10, 8, 0, -5\}$
 - e. \mathbb{N}
2. Demuestra que los números que elegiste como supremo en el ejercicio 1a y 1b cumplen con la definición.
3. Sea $B = [-1, 5] \cup (-8, -1/2)$.
 - a. ¿Es B acotado superiormente?
 - b. ¿Existe el supremo de B ? ¿Cuál es?
4. Sea $D = (3, \infty) \cup \{-2, 10, 8, 0, -5\}$.
 - a. ¿Es D acotado superiormente?
 - b. ¿Existe el supremo de D ? ¿Cuál es?
5. Si $A, B \subset \mathbb{R}$ son conjuntos no vacíos acotados superiormente:
 - a. ¿Qué puedes decir de $A \cup B$?
 - b. ¿Cuál de las igualdades siguientes es verdadera?
 $\sup(A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\}$ ó $\sup(A \cup B) = \min \{\sup A, \sup B\}$.
6. Demuestra la igualdad que hayas elegido como verdadera.

Figura 1.

La pregunta dos requiere de una concepción de tipo proceso para el concepto del supremo, ya que debe demostrar que cierto número concreto es el supremo de un conjunto dado. En primer lugar, debe demostrar que el número seleccionado como supremo es cota superior del conjunto, para lo cual deberá recurrir a la definición del mismo conjunto, en nuestro caso, de intervalo. Después, para demostrar que dicho número es la menor de las cotas superiores se supone la existencia de alguna otra cota superior y se demuestra que esta es mayor o igual que el número que se pretende demostrar que es el supremo. La manera tradicional como se demuestra esta proposición, por ejemplo en la 2a, es la siguiente: Sea $c \in \mathbb{R}$ una cota superior de $[-1, 5]$ entonces para todo

$x \in [-1,5]$ se tiene que $c \geq x$. Como $5 \in [-1,5]$ obtenemos que $c \geq 5$. Sin embargo, en el ejercicio 2b, el supremo, que es $\frac{1}{2}$ no pertenece al conjunto por lo que la segunda parte de la demostración cambia a: Sea c una cota superior de $(-8, \frac{1}{2})$ y supongamos que $c < \frac{1}{2}$. Sea $z = \frac{c + \frac{1}{2}}{2}$, tenemos que $z \in (c, \frac{1}{2})$, pero esto es un absurdo, pues supusimos que c es cota superior de $(-8, \frac{1}{2})$. Por lo tanto $c \geq \frac{1}{2}$.

La respuesta a esta pregunta dos permite observar también si el estudiante ha alcanzado una concepción proceso de los conceptos cota superior y conjunto, ya que debe ser capaz de generalizar las acciones requeridas en la pregunta 1, interiorizarlas y coordinarlas con el proceso que le permite considerar distintos tipos de conjuntos. Además, requiere de la lógica para establecer una demostración, inclusive por reducción al absurdo como en el caso 2b.

Las preguntas 3 y 4 también corresponden a acciones del mismo tipo que las requeridas en la pregunta 1. Sin embargo, se eligieron para observar, principalmente en la pregunta 4, si los estudiantes mostraban una concepción proceso del concepto unión de conjuntos.

El inciso a) de la pregunta 5 exige un proceso de operación con los conjuntos dados, así como la coordinación con el proceso de encontrar una cota superior para el conjunto resultante de la operación, y el inciso b) exige un proceso de comparación mental de todas las posibles cotas superiores para determinar entre ellas la existencia del supremo.

Finalmente, la pregunta 6 requiere de la encapsulación del proceso de encontrar el supremo de un conjunto general para demostrar que tal supremo satisface la definición; cuando es respondida correctamente, muestra una concepción objeto del concepto supremo.

PROCEDIMIENTO

El cuestionario fue aplicado en el horario de clase de cada uno de los grupos mencionados y se les invitó para que, posteriormente, en diferentes horarios a escoger, asistieran para ser entrevistados. Debido al carácter voluntario de la entrevista y a que nos encontrábamos en un periodo de fin de cursos, se realizó un total de siete entrevistas, cada una de ellas de manera individual. De manera previa a la realización de las entrevistas, se examinaron las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas del cuestionario, a fin de elaborar preguntas adecuadas a las respuestas producidas, con el objetivo de que los estudiantes explicitaran lo que estaban pensando al resolver los problemas y determinar, así, con mayor claridad que la permitida por el cuestionario, qué construcciones

mostraban en sus respuestas. Preguntas y respuestas se presentaron oralmente y fueron transcritas a mano en el momento de manifestarse.

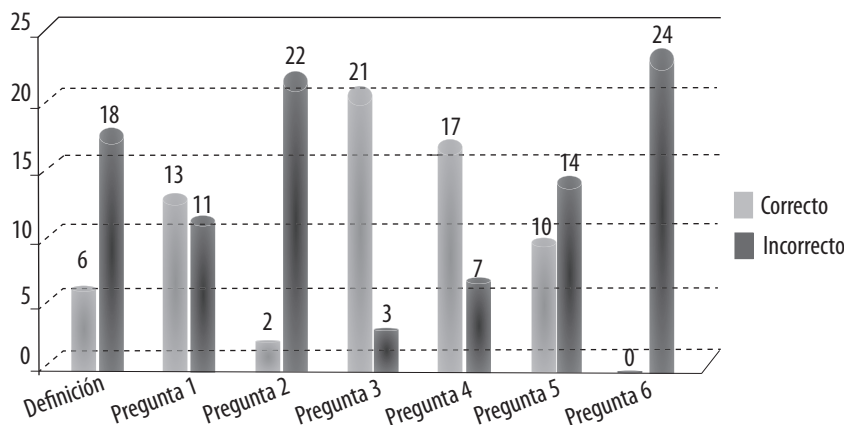
Una vez realizadas las entrevistas, se procedió a un nuevo análisis de los cuestionarios y de las encuestas, ahora de manera conjunta.

ANÁLISIS

En una primera etapa, el análisis de las respuestas consistió en detectar las respuestas correctas e incorrectas y, al mismo tiempo, en elaborar una lista de errores cometidos por los alumnos. La segunda etapa consistió en analizar las respuestas de los alumnos en términos de las construcciones señaladas en la descomposición genética y en extraer la información relacionada con las acciones, procesos, objetos y esquemas considerados en la descomposición genética que mostraban las respuestas de los alumnos. En esta segunda etapa se analizaron también las respuestas de las entrevistas con el fin de retroalimentar los datos y las interpretaciones del análisis del cuestionario. A través de estos análisis fue posible observar la dificultad de la construcción de este concepto por parte de los estudiantes y la concepción que mostraban al momento de contestar el cuestionario. Al encontrar algunas diferencias entre las respuestas de los estudiantes de los grupos A y B, se tomó la decisión de exponer los resultados de estos grupos por separado. Además, gracias a la riqueza de conceptos, representaciones y relaciones que involucra la construcción del concepto de supremo, el análisis realizado nos permitió observar también elementos de la construcción de los conceptos conjunto, cota superior y elemento mínimo de un conjunto. Por otro lado, observamos la gran importancia que tiene, en la construcción del concepto del supremo, el manejo fluido de la notación simbólica y una concepción estructurada de la lógica a la cual hemos denominado esquema de lógica.

RESULTADOS

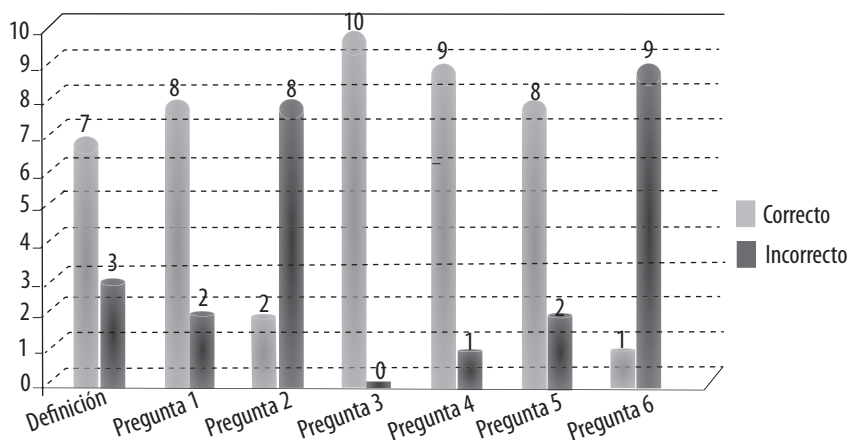
En esta sección presentamos los resultados obtenidos del cuestionario. De manera global y mediante las gráficas siguientes, mostramos las respuestas correctas e incorrectas de cada una de las preguntas o problemas. También describimos, después de cada gráfica, los errores detectados en cada grupo. La gráfica 1 muestra los resultados del grupo A y la gráfica 2 los del grupo B.



Gráfica 1. Resultados del grupo A con 24 estudiantes.

En la gráfica 1 observamos que los estudiantes del grupo A muestran problemas desde la definición de supremo: 87% no pudo darla correctamente. En el análisis de las respuestas a esta pregunta detectamos que algunos estudiantes confundieron la definición de supremo con el axioma del supremo, mientras que otros no pudieron escribir correctamente el inciso dos de la definición. Estos estudiantes abusaban de los cuantificadores o los usaban incorrectamente al tratar de escribir simbólicamente que cualquier cota superior debe ser mayor o igual que el supremo. En la pregunta 1 hubo más errores en este grupo que en el grupo B. Más adelante analizamos estos errores. En el grupo A observamos también que las demostraciones de las preguntas 2 y 6 no pudieron ser realizadas. A diferencia del grupo B, en este grupo A encontramos más respuestas en blanco, inclusive, en la pregunta 2; la mayoría no pudo demostrar que los números seleccionados eran cotas superiores de los intervalos dados.

En la gráfica 2 podemos observar los resultados del grupo B. La mayoría de los estudiantes de este grupo pudo dar la definición de supremo correctamente, así como identificar el supremo de conjuntos concretos y de conjuntos que resultan de la unión de dos conjuntos. Sin embargo, 80% no pudo demostrar que cierto número concreto era el supremo de un conjunto (pregunta 2) y 90% no pudo demostrar que el supremo de la unión de dos conjuntos acotados superiormente, no vacíos, es el mayor de los supremos de los dos conjuntos (pregunta 6).



Gráfica 2. Resultados del Grupo B con 10 estudiantes.

A continuación presentamos las construcciones observadas en los estudiantes en relación con la descomposición genética del concepto del supremo. Esta información nos permite verificar las construcciones que los alumnos fueron capaces de hacer y relacionar las dificultades de los alumnos con construcciones específicas. Todo ello, nos permite obtener información sobre la construcción del concepto para, posteriormente, diseñar estrategias didácticas con el fin de enseñarlo de manera más efectiva. Elegimos algunas respuestas de los estudiantes para ilustrar las construcciones que consideramos más importantes en la construcción del concepto y su relación con las dificultades de los estudiantes. En esta sección no hacemos diferencia entre los grupos A y B, sino un análisis global de las concepciones de los estudiantes al momento de aplicar el cuestionario.

Concepción Acción del concepto supremo

La mayoría de los estudiantes entrevistados pudieron realizar la acción de identificar el supremo de conjuntos dados numéricamente, discretos o continuos como lo son intervalos abiertos o cerrados. De los 34 estudiantes encuestados, 20 contestaron correctamente a la pregunta número uno. Quienes contestaron incorrectamente, mostraron las siguientes dificultades:

1. No identificar el supremo. Algunos confundieron el supremo con el mínimo de un conjunto. Algunas respuestas que muestran esta situación son: $\text{Sup} (-8, -1/2) = -8$, $\text{Sup} (3, \infty) = 3$, $\text{Sup } \mathbb{N} = 1$.
2. No tener una respuesta acerca del supremo de conjuntos no acotados, como el intervalo $(3, \infty)$ o \mathbb{N} , lo cual muestra que dichos estudiantes no han alcanzado una concepción acción del concepto cota superior.
3. No manejar adecuadamente la notación simbólica. Por ejemplo, algunos responden: $\text{Sup} (3, \infty) = \infty$, $\text{Sup} (-8, -1/2) = \cancel{\text{Sup}} (3, \infty) = \emptyset$. Ver Figura 2

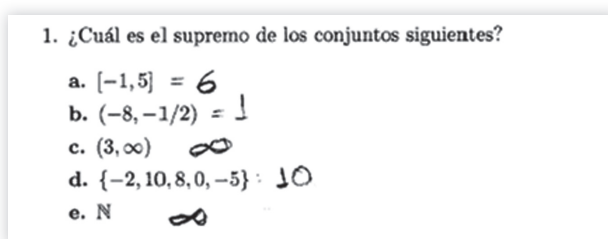


Figura 2. Respuesta de un estudiante a la pregunta 1.

Las preguntas 3 y 4 también exigen acciones y fueron contestadas correctamente casi por 100% de los estudiantes. Sin embargo, algunos estudiantes que intentaron justificar su respuesta, mostraron problemas en la construcción cognitiva de conjunto, por lo que consideramos que algunos de ellos no han interiorizado las acciones en una concepción proceso de conjunto. Por ejemplo algunas respuestas fueron:

1. $B = [-1, 5] \cup (-8, -1/2)$ no tiene supremo porque hay un intervalo vacío en esta unión. (Figura 3).
2. $D = (3, \infty) \cup \{-2, 10, 8, 0, -5\}$ no tiene supremo porque no existe la unión entre un intervalo y un conjunto. (Figura 4).
3. El supremo de D no existe porque $(3, \infty)$ tiende a infinito.
4. El supremo de D no existe porque \mathbb{N} no está acotado superiormente.
5. El supremo de D es 10.

③ Sea $B = [-1, 5] \cup (-8, -\frac{1}{2})$.
 a) Si, por el 5
 b) No por que hay un intervalo vacío en la union.

Figura 3. Respuesta de un estudiante a la pregunta 3.

4. Sea $D = (3, \infty) \cup \{-2, 10, 8, 0, -5\}$
 a. ¿Es D acotado superiormente? No puede porque no se puede unir un intervalo con un conjunto en el intervalo $(-3, \infty)$
 b. ¿No está acotado superiormente porque siempre existe un $x_i > x$

Figura 4. Respuesta de un estudiante a la pregunta 4.

Concepción Proceso del concepto supremo

La respuesta a la pregunta dos, como se mencionó anteriormente, permite observar una concepción proceso de los conceptos conjunto, cota superior y supremo, debido a que el alumno debe generalizar las acciones requeridas en la pregunta 1, interiorizarlas y coordinarlas con el proceso que le permite considerar distintos tipos de conjuntos. Las respuestas de los estudiantes al cuestionario y a las entrevistas nos mostraron que la actividad solicitada implicaba también un proceso de uso de la lógica, pues observamos que el estudiante no concluía la tarea solicitada, porque no era capaz de reproducir la demostración requerida. La mayoría de los estudiantes puede demostrar que 5 es cota superior de $[-1, 5]$, lo cual muestra una concepción proceso para cota superior, pero no pueden demostrar que es la menor de las cotas superiores. Solo cuatro estudiantes demostraron correctamente que 5 es la menor de las cotas superiores de $[-1, 5]$. Detectamos tres tipos de problemas en las respuestas dadas por los estudiantes para la demostración de esta proposición:

1. Le dan a c un valor concreto en la segunda parte de la demostración. (Figura 5)
2. No manejan adecuadamente la notación simbólica.
3. No logran estructurar una demostración. Algunos estudiantes empiezan suponiendo lo que deben demostrar y, a partir de ahí, implican sin demostrar. Encontramos en varios estudiantes el formato seguido en la Figura 5. Ver, por ejemplo, la Figura 6.

1a. Si $\alpha = \text{supremo de } [-1, 5]$
 y $\alpha = 5$, entonces
 $\forall x \in [-1, 5]$ se cumple
 $5 \geq x$ y
 si $\exists c \in \mathbb{R}$, tal que $\forall x \in [-1, 5] \quad c \geq x$,
 si $c = 5$ cumple que $c \geq x$, $x \in [-1, 5]$,
 entonces $c \geq \alpha$, pero si $c = 5$ y $\alpha = 5 = \text{supremo}$
 cumple que $c \geq \alpha$

Figura 5. Respuesta de un estudiante a la pregunta 2a.

2 b. $(-8, \frac{1}{2})$

Si $\frac{1}{2} = \text{Sup } A \Rightarrow$

- i) $\frac{1}{2} \geq a \quad \forall a \in A$
- ii) si m es cota superior de $A \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m$
- i) Puesto que el intervalo es, (el estudiante dibuja el intervalo $(-8, \frac{1}{2})$ sobre la recta real) está acotado superiormente, ya que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ que es el mayor de todos.
- ii) si m es cota superior de $A \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m$.

Tomo a 1 como cota superior de $A \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2}$, como el conjunto de las cotas superiores es $[1/2, \infty)$ por lo tanto $\frac{1}{2} = \text{Sup } A$

Figura 6. Transcripción de la respuesta de un estudiante a la pregunta 2b. Observar que el estudiante parte de lo que desea demostrar y hace implicaciones.

Concepción Objeto del concepto supremo

Claramente, la mayoría de los estudiantes que participaron en este estudio no ha encapsulado el concepto de supremo pues, como hemos explicado antes, la mayoría no pudo realizar las acciones o el proceso que implica demostrar que cierto número concreto es la menor de las cotas superiores de un conjunto dado, en este caso, un intervalo cerrado. La pregunta 6, que exige lo mismo pero para la unión de dos conjuntos arbitrarios, acotados y no vacíos, solo fue respondida correctamente por una estudiante. Algunos de los problemas detectados en las respuestas de esta pregunta son:

1. Intentan demostrar que $\text{Sup}(A \cup B) = \min \{\text{Sup} A, \text{Sup} B\}$. Estos estudiantes muestran apenas una concepción acción del concepto supremo.
2. Equivocan el planteamiento de la demostración. Estos estudiantes muestran procesos en los conceptos cota superior y supremo, pero no han construido un esquema de lógica.
3. Algunos pretenden demostrar que $\text{Sup}(A \cup B) = \max \{\text{Sup} A, \text{Sup} B\}$ demostrando que $\text{Sup}(A \cup B) = \min \{\text{Sup} A, \text{Sup} B\}$ no se cumple.
4. Demuestran que la igualdad se cumple considerando algún caso particular para los conjuntos A y B. (Figura 7).
5. No manejan adecuadamente la notación simbólica. Algunos denotaban algún objeto con un símbolo y luego este símbolo lo usaban para denotar otro objeto.

6 P.D $\text{sup}(A \cup B) = \max \{ \text{sup} A, \text{sup} B \}$
 Sea $A = (a, c)$ $B = (b, d)$ $\wedge c < d$ $\wedge c = \text{sup} A$, $d = \text{sup} B$.
 De esto se tiene que "d" es cota superior de A y B, por lo tanto
 Solo falta probar que "d" es cota superior de $(A \cup B)$ entonces $d \leq p$
 Demostración por contradicción,
 Supongamos $p < d$ entonces $\exists \frac{p+d}{2} \in (A \cup B)$ $\wedge p < \frac{p+d}{2} < d$
 Si $p < d \Rightarrow \begin{cases} p+p < d+p \\ p+d < d+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p < d+p \\ p+d < 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p/2 < \frac{d+p}{2} \\ p+d < 2d/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < \frac{d+p}{2} \\ p+d < d \end{cases} \quad \text{✗}$
 La contradicción se debe a que $\frac{p+d}{2} \in (A \cup B) \wedge \frac{p+d}{2} > p \therefore d$ es el sup de $(A \cup B)$
 Ahora como $c < d \Rightarrow \text{sup} A < \text{sup} B \Rightarrow \max \{ \text{sup} A, \text{sup} B \} = \text{sup} B = d$
 $\therefore \text{sup}(A \cup B) = \max \{ \text{sup} A, \text{sup} B \}$

Figura 7. Respuesta de un estudiante a la pregunta 6. Observemos que realiza la demostración pero para los conjuntos A y B cuando estos son intervalos abiertos.

A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario y en las entrevistas pudimos observar que la mayor parte de ellos muestra únicamente una concepción acción de los conceptos de cota superior y de supremo, dado que son capaces de responder memorísticamente, en algunos casos, o de hacer las acciones de comparación necesarias para determinarlos en el caso de conjuntos finitos y simples.

Pocos estudiantes muestran haber interiorizado estos conceptos en procesos, y parece claro que un obstáculo que se presenta a la interiorización es la falta de construcción de un esquema de conjunto que permita a los estudiantes operar y comparar conjuntos, algo que en la descomposición genética propuesta se establece como necesario. Otro obstáculo que se presenta a la interiorización de las acciones requeridas en la construcción de estos conceptos es la construcción de un esquema de lógica que incluya la construcción de los cuantificadores como objeto.

El hecho de que únicamente una alumna muestre una concepción objeto de estos conceptos pone de manifiesto la complejidad involucrada en su construcción, así como el hecho de que, en los cursos que han recibido, no ha habido un énfasis en actividades que permitan a los alumnos interiorizar y encapsular las construcciones descritas en la descomposición genética.

Respecto a las construcciones predichas en la descomposición genética propuesta en este trabajo, encontramos que los alumnos no han construido un esquema de conjunto y un esquema de lógica y que, justamente, la falta de construcción de estos esquemas, representa un obstáculo importante en la construcción del concepto de supremo. Consideramos que, para que los alumnos aprendan efectivamente este concepto, es necesario diseñar actividades que partan de la construcción de estos esquemas, antes de iniciar la construcción del concepto de supremo.

En las respuestas de los alumnos encontramos las acciones y procesos descritos en la descomposición genética para la construcción del concepto de cota superior y de mínima cota superior, aunque una limitación de nuestros instrumentos consiste en que no se incluyeron preguntas para determinar si los estudiantes construyen el proceso de reversión de los procesos de construcción de estas nociones. Ello tendrá que estudiarse en un futuro. El hecho de que en las respuestas de la alumna que demostró la construcción de estos conceptos como objeto, se identificaran las construcciones propuestas en la descomposición genética, nos permite considerarla como válida, si se toma en cuenta la

importancia de la construcción de los esquemas considerados en ella como contruidos.

CONCLUSIONES

El manejo inadecuado de la notación simbólica es una constante en las respuestas de los estudiantes y, de acuerdo con la descomposición genética del concepto del supremo, requerimos del manejo adecuado de esta para la coordinación de los procesos necesarios para generalizar y abstraer dicho concepto. La construcción de la concepción proceso del concepto del supremo no es alcanzado sin un manejo adecuado de la notación simbólica, así como de la concepción objeto de conjunto que, como se observa en los resultados, no ha sido construida por estos alumnos. Por otro lado, es requerido un esquema de lógica para encapsular el concepto del supremo y lograr la concepción objeto de este. Los resultados muestran que los alumnos no han construido dicha concepción proceso, pues se obtuvieron solo seis respuestas correctas en el caso concreto de demostrar que $5 = \sup [-1,5]$. Estas respuestas correctas correspondieron a los estudiantes del grupo B que, como se mencionó, se encontraban cursando la materia de Cálculo Diferencial. Estos seis estudiantes mostraron una concepción proceso en la construcción del concepto supremo pero, al no contar con un esquema de lógica, no mostraron la encapsulación del proceso del supremo en un objeto. Lo anterior se concluye de la segunda parte de la demostración de la pregunta 6, en la que estos alumnos cometieron errores en el planteamiento de la demostración o hicieron suposiciones incorrectas o contradictorias.

La demostración de que cierto número concreto cumple con la parte 2 de la definición, requiere que el estudiante sea capaz de realizar esta acción con diferentes tipos de conjuntos, hasta interiorizar este proceso y poder demostrar que cierto número abstracto es el supremo de un conjunto arbitrario, dado en forma general. Finalmente, los datos obtenidos nos muestran que la construcción de este concepto debe pasar por la construcción de todos los conceptos involucrados, coordinados con los esquemas de lógica y de conjuntos y relacionados mediante la estructura lógica que dan las demostraciones, tal y como lo habíamos supuesto en la descomposición genética que presentamos.

La validación de la descomposición genética, así como el análisis de las dificultades de los alumnos en términos de las construcciones que son capaces de hacer, nos ha permitido proponer una secuencia de actividades, basada en la

descomposición genética, que brinde a los estudiantes la oportunidad de hacer las construcciones necesarias para entender el concepto del supremo como objeto. Tal secuencia se puede conocer en Acevedo (2011).

DATOS DE LAS AUTORAS

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
lhernan@fcfm.buap.mx

María Trigueros Gaisman
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM),
trigue@itam.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acevedo, C. (2011). Una secuencia didáctica para el concepto del Supremo basada en la teoría APOE. Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.
- Aldana, E. (2011). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. Tesis Doctoral. Salamanca. Universidad de Salamanca.
- Angoa, J., Contreras, A., Ibarra, M., Linares, R., Martínez, A. (2004). *Matemáticas Elementales*. Fomento Editorial Universitario, BUAP, México.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, pp. 1-32.
- Apostol, T. M., (1982). *Calculus*, Vol. 1, Editorial Reverté, Barcelona, España.
- Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En Steffe, L. P. (Ed.). *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, pp. 160-202. Nueva York, Springer-Verlag.
- Dubinsky, E. (1991a). "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking". En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.
- Dubinsky, E. (1996). "Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria". En *Revista de Educación Matemática*, vol. 8, pp. 31-36.

- Hasser, N., B., (1988). *Análisis Matemático I*, Vol. 1, Trillas, México.
- Maldonado, G., (2012). Factores que influyen en la reprobación del curso de Matemáticas Básicas de la FCFM, BUAP. Tesis de licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México.
- Martin, W., Loch, S., Cooley, L., Dexter, S., and Vidakovic, D. (2010). Integrating learning theories and application-based modules in teaching linear algebra. En *Journal of Linear Algebra and its Applications* 432, 2089–2099
- Martinez-Planell, R. y Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. En *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-012-9408-8. Versión impresa por aparecer.
- Piaget, J. y R. García (1996). *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Siglo Veintiuno Editores. México.
- Roa-Fuentes S. (2012). El infinito: Una mirada desde la teoría APOE. *Memorias del Primer Coloquio de Estudiantes de Doctorado*. CINVESTAV-México, v.1 p. 363-373
- Salgado, H. y Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática*, 21(1), 91-117. Santillana. México.
- Sánchez-Matamoros G., G., García B., M. y Llinares C. S. (2006). El Desarrollo del esquema de derivada. En *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- Spivak, M., (1992). *Cálculo Infinitesimal*, Segunda edición, Reverté, Barcelona, España.
- Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. y Simpson, A. (2000). What is the object of the Encapsulation of a Process? En *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), pp. 223-241.
- Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. En *Educación Matemática*, vol. 17, No. 1, pp. 5-31. Santillana. México.